DEFINIZIONI:

**MATRICE**

Dato un campo K, definiamo matrice ad elementi in K di tipo (n, m) un insieme di numeri ordinati secondo righe e colonne in una tabella rettangolare.  
Per indicare gli elementi si usano indici di colonna i e j, oppure i numeri  
i è l’indice di riga tale che 1 ≤ i ≤ n  
j è l’indice di colonna tale che 1 ≤ j ≤ m

**TIPI DI MATRICE**

* Definiamo matrice **IDENTICA** una matrice quadrata nella quale gli elementi che costituiscono la diagonale principale sono tutti uguali a 1 e tutti gli altri sono nulli. Una matrice identica si indica con In
* Una matrice quadrata n x n si dice **SIMMETRICA** se aij = aji dove i =/= j.
* Una matrice quadrata si dice **TRIANGOLARE INFERIORE** se gli elementi che stanno al di sopra della diagonale principale sono tutti nulli
* Si dice **TRIANGOLARE SUPERIORE** se gli elementi che stanno al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli.
* Una matrice quadrata si dice **DIAGONALE** se tutti gli elementi sono nulli eccetto gli elementi che costituiscono la diagonale principale.

**SOMMA DI MATRICI**

Siano A e B due matrici n × m a coefficienti in K. La matrice somma A + B è una matrice C, definita da:  
cij = aij + bij con 1 ≤ i ≤ n e 1 ≤ j ≤ m. La somma di due matrici A e B è definita solo quando A e B hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

**MATRICE TRASPOSTA**

Data una matrice A, la trasposta di A è la matrice che si indica con AT , ottenuta da A scambiando fra loro le righe con le colonne.

**MOLTIPLICAZIONE DI MATRICE PER UNO SCALARE**

Sia A una matrice n × m a coefficienti nel campo K e λ uno scalare, cioè un elemento del campo su cui si opera. Chiamiamo prodotto di λ per A, la matrice C dove: aij = λaij, ∀i = 1, 2, …, n e ∀i = 1, 2, …, m

Il prodotto matrice per scalare gode di quattro fondamentali proprietà:

1) (λµ)A = λ(µA)  
2) (λ+µ)A = λΑ + µΑ   
3) λ (A + B) = λA + λB   
4) λ A = A  
  
**MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI**

Per quanto riguarda il prodotto interno, il più importante è il prodotto righe per colonne.   
Il prodotto righe per colonne tra matrici è definito solo se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice.

Siano A una matrice m x n e B una matrice p x q, dove n = p, la matrice C m x q il cui elemento generico cij è dato da:

cij =

La relazione precedente afferma che per ottenere l’elemento cij di C si considera la riga i - esima di A e la colonna j - esima di B, si eseguono i prodotti dei termini corrispondenti e si sommano i prodotti così ottenuti.

* Il prodotto righe per colonne gode della proprietà associativa e della proprietà distributiva rispettivamente a sinistra e a destra rispetto alla somma.
* Il prodotto di matrici non è commutativo se il risultato del prodotto sarebbe una matrice quadrata.
* La trasposta del prodotto di due matrici si ottiene moltiplicando le trasposte delle matrici in ordine inverso.

**DETERMINANTE**

Chiamiamo determinante di A il numero det A o |A| che ad essa viene associato.  
Un generico elemento aij del determinante si dice di **classe pari o dispari** a seconda che i + j sia un numero pari o dispari.   
Si chiama **minore complementare** dell'elemento aij il determinante che si ottiene da A, sopprimendo la i - esima riga e la j - esima colonna.  
Si definisce **complemento algebrico** dell'elemento aij e si indica con Aij, il minore complementare di aij preceduto dal segno + o dal segno - a seconda che tale elemento sia di classe pari o dispari.  
**1° teorema di Laplace**: il valore di |A| si ottiene facendo la somma dei prodotti degli elementi di una linea per i rispettivi complementi algebrici. E’ meglio scegliere una linea con degli zeri per ridurre i calcoli.  
**2° teorema di Laplace:** se si moltiplicano gli elementi di una linea per i complementi algebrici di una linea parallela, il determinante è nullo.  
  
**Proprietà dei determinanti**   
• Se gli elementi di una linea sono tutti nulli, il determinante è nullo.   
• Se scambiamo tra loro due linee parallele il determinante cambia segno.   
• Se gli elementi di due linee parallele sono uguali o proporzionali, il determinante è nullo.   
• Se gli elementi di una linea vengono moltiplicati per uno stesso numero k, il determinante viene moltiplicato per k.  
• Due matrici quadrate trasposte hanno lo stesso determinante.  
• Se gli elementi di una linea sono la somma di due o più addendi, il determinante è uguale alla somma dei due o più determinanti che si ottengono disponendo in essi i vari addendi.   
• Il determinante non cambia se si aggiungono agli elementi di una linea gli elementi corrispondenti di un'altra linea ad essa parallela moltiplicati per un numero k.  
• Date due matrici quadrate dello stesso ordine, il determinante della matrice prodotto è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici date.

**MATRICE INVERSA**

Una matrice è invertibile solo quando det ≠ 0.

**Metodo 1:**Data la matrice A con det ≠ 0 consideriamo la sua trasposta AT. Dopo aver calcolato i complementi algebrici degli elementi aij di tale matrice, inseriamoli in una matrice B potremo scrivere la matrice inversa A−1 data da: A−1 = ( 1/det A ) \* B

**Metodo 2:**Si affianca la matrice identica In a destra della matrice di partenza e tramite la riduzione per righe si deve spostare la matrice di destra nella parte sinistra. La parte destra della matrice sarà la matrice inversa a quella data.

**RANGO DI UNA MATRICE**

Sia A una matrice di m righe ed n colonne, si definisce rango o caratteristica di A l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da essa, oppure il numero di elementi speciali di A(elementi posti al di sopra di valori tutti nulli in una colonna).

**TEOREMI VARI**

* Le righe di una matrice sono tra loro linearmente dipendenti se e solo se il loro numero è maggiore del rango della matrice.
* Il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di linee parallele linearmente indipendenti della matrice.
* **Teorema di Kronecher:** se una matrice A possiede un minore M, non nullo, di ordine k e se sono nulli tutti i minori di ordine k+1, ottenuti orlando M con una riga e una colonna qualsiasi di A, allora il rango della matrice A è uguale a k.

**TEOREMA di CRAMER**

Permette di risolvere un sistema di equazioni lineari supposto possibile.  
Esso afferma che un sistema di equazioni lineari algebriche in ***n*** incognite, nel quale la **MATRICE DEI COEFFICIENTI**è [**NON SINGOLARE**](https://www.lezionidimatematica.net/Matrici/lezioni/matrici_lezione_54.htm) (det =/= 0), ammette *una e una sola soluzione.*Il **VALORE di ciascuna INCOGNITA** è uguale ad una **FRAZIONE** che ha:

* per **DENOMINATORE** il **DETERMINANTE della MATRICE dei COEFFICIENTI**;
* per **NUMERATORE** il **DETERMINANTE** che si ottiene dal denominatore **SOSTITUENDO AI COEFFICIENTI DELL'INCOGNITA**che si vuole calcolare i **CORRISPONDENTI TERMINI NOTI**.

Possiamo scrivere il **TEOREMA di CRAMER**nel modo che segue:  
***xi = det Ai / det A***   
dove ***A****è la matrice dei coefficienti*, ***Ai****è la matrice ottenuta da****A****sostituendo la sua i-esima colonna con la colonna dei termini noti*, ***xi****sono le incognite con****i****che va da****1****ad****n****.*

*5x + y = 3*

*6x + 2y = 1*

*5 1*

*6 2*

*DET= 4*

*3 1*

*1 2*

*Dx = 5*

*5 3*

*6 1*

*Dy = -13*

*X, Y*

*X= Dx/D = 5/4*

*Y= Dy/D = -13/4*

**TEOREMA DI ROUCHE’-CAPELLI**

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite, che possiamo scrivere in forma matriciale AX = B, dove A è la matrice dei coefficienti, X è il vettore colonna delle incognite e B è il vettore colonna dei termini noti. Il sistema è descritto da due matrici: la matrice dei coefficienti, appunto, e la matrice completa A0 , ottenuta aggiungendo ad A la colonna dei termini noti.

Il teorema di Rouché-Capelli permette di stabilire la compatibilità conoscendo solamente il rango di A e di A0.  
Sia S un sistema lineare di m equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A e matrice completa A0. Allora:   
a) S `e compatibile se e solo se r(A) = r(A0) .   
Supponiamo ora che S sia compatibile, e poniamo r(A) = r(A0) = r.   
b) Il sistema ammette una e una sola soluzione se e solo se r = n.   
c) Il sistema ammette ∞n−r soluzioni (cioè infinite soluzioni dipendenti da n−r parametri indipendenti) se e solo se r < n.

**Indipendenza lineare di righe e colonne**

I vettori colonna di A sono linearmente indipendenti se e solo se r(A) = k (il numero delle colonne). b) I vettori riga di A sono linearmente indipendenti se e solo se r(A) = n (il numero delle righe). In particolare, se A è quadrata n × n, allora gli n vettori riga (o colonna) di A sono linearmente indipendenti se e solo se det A =/= 0.

**STRUTTURE ALGEBRICHE**

Dato un insieme di enti A diremo che **un' operazione X e' di composizione interna** se presi comunque due elementi di A quali a, b, esiste l'elemento c appartenente ad A tale che vale **a X b = c**.  
Si dice in modo equivalente che l'insieme A e' chiuso rispetto all'operazione X, cioè l'operazione agisce sul prodotto cartesiano A x A e lo trasforma ancora in A ( **X : A x A -> A** ).  
Dato un insieme di enti A e su di esso un' operazione diremo che n appartenente ad A è l'elemento neutro rispetto all'operazione X se per qualunque elemento a di A vale **a X n = n X a = a**, cioè la composizione di qualunque elemento a di A con n restituisce sempre lo stesso elemento a.  
Dato un insieme di enti A e su di esso un' operazione diremo che a' appartenente ad A è l'elemento simmetrico rispetto all' elemento a di A se vale **a X a' = a' X a = n**, cioè la composizione di qualunque elemento a di A con il proprio simmetrico restituisce sempre l'elemento neutro n.

Su ogni insieme non vuoto A si possono definire una o più leggi di composizione interna.  
Si definisce **struttura algebrica** una coppia (A, X, X2, …) dove A è un insieme non vuoto, e X , X1 ecc sono operazioni algebriche binarie su A.

Semigruppo:

coppia (M, \*) dove \* è associativa in M

Monoide:  
terna (M,\*, 1) dove (M,\*) è un semigruppo e 1 è l’elemento neutro rispetto a \* in M

IL gruppo è una particolare struttura algebrica, un gruppo è una coppia (A,\*), per essere un gruppo

* \* deve essere un’operazione interna ad A
* \* deve essere associativa
* Deve esistere l’elemento neutro rispetto a \*
* Ogni elemento di A deve essere simmetrizzabile

UN gruppo si dice abeliano se \* gode della proprietà commutativa, un gruppo si dice finito se ha un numero finito di elementi. Il numero dei suoi elementi si dice ordine del gruppo

Il campo è una particolare struttura algebrica , esso è una terna (k,+,\*)

Per essere un campo :

* K è un insieme non vuoto
* + e \* godono delle seguenti proprietà :

1. Chiusura: per ogni a e b di K 🡪 (a+b) è in K , (a\*b) è in K
2. Associatività: a(b+c)= (a+b)+c
3. Commutatività: a+b=b+a , a\*b=b\*a
4. Identità: per a di K 🡪 (a+0)=a , a\*1=a
5. Opposto: per ogni a esiste b tale che a+b=0
6. Inverso: per ogni a esiste c tale che a\*c=1
7. Distributività
8. a\*b =/= se a=/=0 e b=/=0
9. l’inverso di a è =/= 0
10. l’inverso e l’opposto di a sono unici

Anello:

Si definisce anello (A ; +,\* ) un insieme di enti A su cui siano definite due operazioni , che godano delle seguenti proprieta':

(A ; +) e' un gruppo abeliano (commutativo)

(A ; \*) e' un semigruppo

l'operazione e' distributiva rispetto all'operazione , sia a destra che a sinistra, cioe'

a \*(b+ c) = (a \* b)+ (a \* c)

(b + c)\* a = (b \* a)+ (c \* a)

Spazi Vettoriali

Diremo che **V** e' uno **spazio vettoriale** sul campo **K** se abbiamo:

* L'insieme **(V, +)** e' un gruppo commutativo
* La moltiplicazione scalare **K \*V** ha come codominio una porzione di **V**
* la moltiplicazione scalare e' commutativa:  
  a \***x** = **x** \* a      per ogni elemento di **V** e **K**
* Vale la proprieta' distributiva della moltiplicazione scalare rispetto all'addizione vettoriale  
  a \* (**x** + **y**) = a \***x** + a \***y**
* Vale la proprieta' distributiva della moltiplicazione scalare rispetto all'addizione di scalari  
  (a + b) \* **x** = a \* **x +** b \* **x**  
  Dopo l'uguale devo usare il simbolo **+** perche' a \***x** e b \* **x** sono vettori e quindi devo sommare due vettori
* Vale la proprieta' associativa fra gli scalari  
  a \* b (\* **x**) = (a \* b)\* **x**
* Inoltre se 1 e' l'elemento neutro moltiplicativo di **K** allora vale:  
  1 \* **x** = **x**

Sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale,sia W un sottoinsieme di V, se esso rispetta tutte le proprietà degli spazi vettoriali si dirà sottospazio vettoriale di V.

Span(V) è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente n vettori infatti è detto sottospazio generato da v1, v2 … vn.

Span è l’insieme dei vettori che si possono scrivere come combinazione lineare di v1, v2, … vn.

Due(o più) vettori sono linearmente dipendenti se esiste almeno una loro combinazione lineare con coefficenti non tutti nulli tale che il risultato è il vettore nullo altrimenti, se non esiste sono linearmente indipendenti.